

VISUALIZZAZIONI GRAFICHE ANIMATE

Riassunto L'articolo propone l'uso, nella didattica della matematica, delle animazioni connesse alle tecnologie informatiche allo scopo di rendere evidente l'evoluzione dei valori delle grandezze coinvolte in una relazione matematica, che rappresenta la sintesi di processi cognitivi di carattere induttivo e di carattere logico-deduttivo non disgiunti dai percorsi, spesso tortuosi, della ricerca sia in ambito scientifico che in ambito socio-educativo.

Abstract: This article proposes the use of animations in mathematics didactic together to computer science technologies, in order to show the evolution of the quantities values involved in a formal relation representing the synthesis of inductive and logical-deductive cognitive processes; these are joined to the frequently tortuous ways of scientific research and social sciences.

Carlo Elce

Ordinario di matematica e fisica presso Liceo Scientifico "Diaz" di Caserta – Supervisore di tirocinio F.I.M. presso la S.I.C.S.I. di Napoli

Molti docenti, impegnati nei corsi sperimentali, hanno avuto modo di osservare che le animazioni nella didattica sono accolte in modo favorevole, per non dire entusiasta, da parte dei ragazzi. Vedere come la matematica possa servire a rappresentare un fenomeno in evoluzione diventa motivo di interesse e conferisce ai procedimenti razionali quella efficacia che è propria di tutte quelle attività umane per le quali valga la pena di impegnarsi. Un'animazione, nel caso sia anche quantitativa, dal punto di vista didattico consente di analizzare in poco tempo la variazione delle grandezze coinvolte e quindi di passare da processi induttivi alla formalizzazione di leggi generali conseguendo pertanto l'obiettivo di rendere consapevole il processo di astrazione in matematica nel rispetto degli stili cognitivi degli alunni e degli individui in genere, che hanno spesso bisogno di avere un supporto grafico per i loro processi logico-formali. Dalle ultime ricerche in pedagogia emerge, infatti, che la lateralizzazione delle

conoscenze mediante le immagini, da parte del lobo laterale sinistro del nostro cervello, rende più facile e più proficua l'acquisizione di strutture cognitive, che diventano così strumenti metacognitivi per interpretare il mondo che ci circonda, ed infine possono sviluppare quegli atteggiamenti fantacognitivi essenziali a dare risposte originali ai sempre nuovi problemi del mondo reale. Sembra che questo, poi in definitiva, sia il senso della scuola e della cultura in genere.

A tale scopo le nuove tecnologie riescono a raggiungere il risultato in quanto possono ricondurre la matematica ad un ruolo più aderente e coerente allo sviluppo delle strutture cognitive degli alunni. Inoltre si rende evidente che la sistemazione di problematiche di ambiti diversi, mediante l'introduzione di strutture algebriche, è successiva alla fase intuitiva e si fa giustizia del fatto che l'intuizione apre, per prima, la strada alla risoluzione di problemi che si pongono all'attenzione degli uomini e che solo in un secondo tempo, dopo percorsi non lineari, pieni di errori e di nuovi tentativi, il lavoro dei logici matematici sistema le questioni poste.

Purtroppo permangono, in talune situazioni, metodologie didattiche tendenti ad isolare il docente nella sua classe e a utilizzare come veicolo dell'informazione e della formazione la sola parola e/o il gesso e la lavagna: in certi casi, viene presentato ai ragazzi un discorso rigoroso dal punto di vista logico ma non sempre attento e coerente con gli stili cognitivi degli alunni. In buona sostanza, in questi casi, il docente pretende di far subire agli alunni un salto di 2000-3000 anni di storia del pensiero scientifico e che essi si sintonizzino con chi, vuoi per l'età vuoi per gli studi a livello universitario, ha avuto la possibilità di strutturare le proprie conoscenze. In definitiva una scuola siffatta non socializza le conoscenze perché si rivolge ad un pubblico scelto.

Non si vuole fare qui una critica generica alla scuola ma solo a un modo di fare scuola che negli anni passati ed ancora oggi miete innumerevoli vittime.

Se vogliamo socializzare le conoscenze dobbiamo adeguare i metodi di insegnamento agli stili cognitivi delle persone, a cui ci rivolgiamo, e amplificare i nostri messaggi, ricchi di tutte le risorse che ci mettono a disposizione le nuove tecnologie, in contesti territoriali e socio-culturali sempre più vasti.

Allora ben vengano gli sforzi di tutti e, perché no, i ritrovati della moderna tecnologia a rimuovere gli ostacoli che si frappongono alla conoscenza, allo sviluppo consapevole e produttivo dei percorsi formativi.

Il contesto dell'insegnamento-apprendimento cambia di molto con Internet. Non c'è solo l'insegnante e la classe ma tutto un mondo di ricercatori, insegnanti, appassionati, professionisti che usano la matematica e che danno un contributo al suo sviluppo rendendo ben visibile gli sforzi, le tensioni ideali e i guizzi fantacognitivi che spesso emergono naturalmente e si fanno strada nelle menti degli esseri umani. Sta a tutti coloro, che sono coinvolti in modo indiretto o diretto nell'ambito dell'educazione, convogliare queste ingenti risorse umane verso sbocchi produttivi sia a livelli formativi che a livelli socio-culturali.

Ecco alcuni fotogrammi di un'animazione tendente ad evidenziare come si possa realizzare un modello di geometria non euclidea rappresentato dalla Pseudosfera di Beltrami, generata dalla rotazione completa della trattrice intorno al suo asintoto.

Una superficie di rotazione intorno all'asse z è definita da una equazione del tipo

$$z = f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) \quad \text{Poniamo} \quad X = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{e consideriamo la}$$

funzione

$$z = R \cdot \ln\left(\frac{R + \sqrt{R^2 - X^2}}{X} + \sqrt{R^2 - X^2}\right) \quad z = R \cdot \ln\left(\frac{R - \sqrt{R^2 - X^2}}{X} - \sqrt{R^2 - X^2}\right)$$

La rotazione di tale funzione intorno al proprio asintoto genera una superficie detta PSEUDOSFERA

La sua curvatura meridiana è quella della linea meridiana e vale

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{\left| \frac{d^2 f}{dx^2} \right|}{\left[1 + \left(\frac{df}{dX} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}$$

La sua curvatura parallela è quella della linea parallela e vale

$$\frac{1}{\rho_2} = \frac{\left(\frac{df}{dX} \right)^2}{X \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dX} \right)^2}}$$

Per la nostra funzione si ha

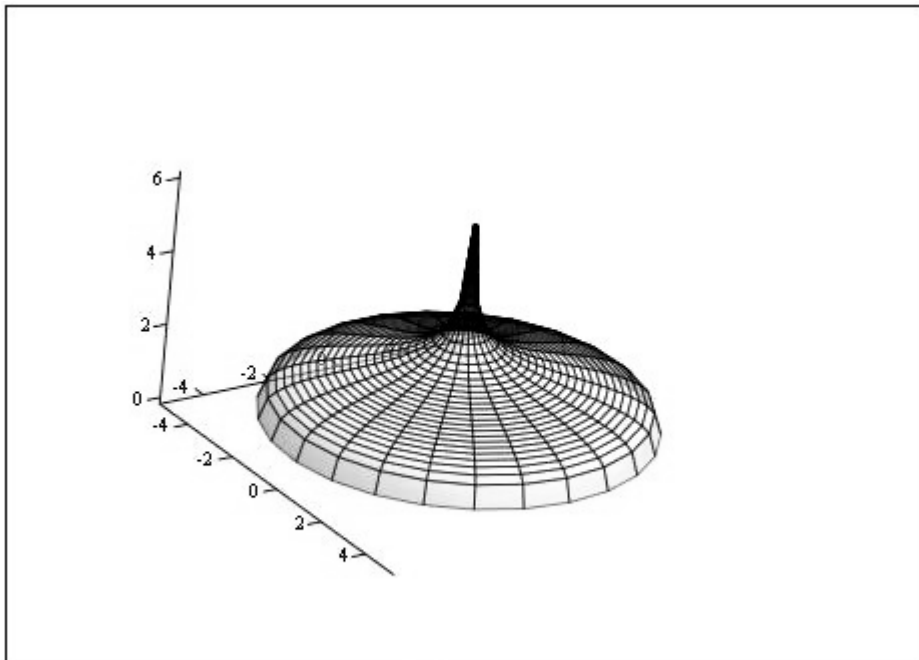
$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{X}{R \cdot \sqrt{R^2 - X^2}}$$

$$\frac{1}{\rho_2} = \frac{\sqrt{R^2 - X^2}}{R \cdot X}$$

Il loro prodotto vale, in valore assoluto,

$$\frac{1}{\rho_1} \cdot \frac{1}{\rho_2} = \frac{X}{R \cdot \sqrt{R^2 - X^2}} \cdot \frac{\sqrt{R^2 - X^2}}{R \cdot X} = \frac{1}{R^2}$$

Ma per i punti della Pseudosfera, essendo tutti iperbolici, le due curvatures hanno segno contrario, quindi la curvatura totale risulta negativa. Se assumiamo R come parametro, che chiamiamo k , avremo una superficie parametrica variabile al variare di k con curvatures principali variabili ma, per ogni superficie, la curvatura totale sarà costante per ogni punto della superficie. Il grafico seguente è stato ottenuto per $k=5$ e considerando solo il ramo superiore.



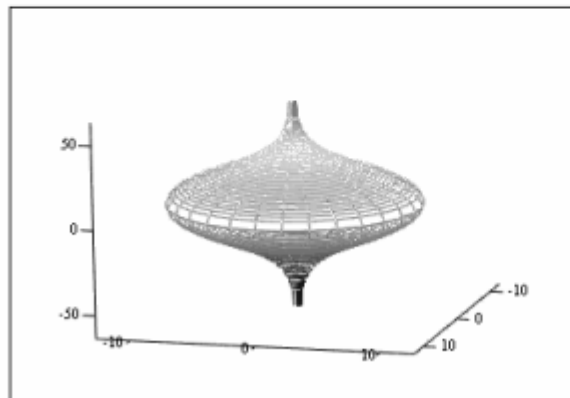
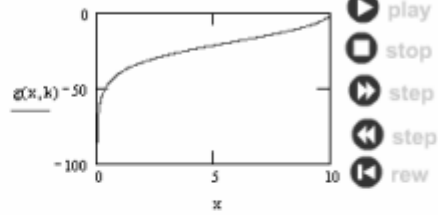
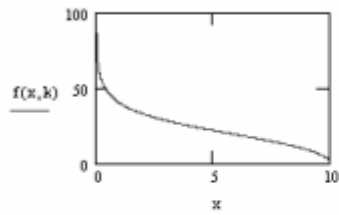
Carlo Elce

PSEUDOSFERA GENERATA DALLA ROTAZIONE DELLA TRATTRICE (autore Carlo Elce)

$$f(x, k) := k \ln \left(\frac{k + \sqrt{k^2 - x^2}}{x} \right) + \sqrt{k^2 - x^2}$$

$k = 10$

$$g(x, k) := k \ln \left(\frac{k - \sqrt{k^2 - x^2}}{x} \right) - \sqrt{k^2 - x^2}$$



C1 curvatura meridiana:

$$C1(x, k) := \frac{-x}{k\sqrt{k^2 - x^2}}$$

C2 curvatura parallela:

$$C2(x, k) := \frac{\sqrt{k^2 - x^2}}{kx}$$

C curvatura totale:

$$C(x, k) := C1(x, k) \cdot C2(x, k)$$

CURVATURA DELLA PSEUDOSFERA GENERATA DALLA TRATTRICE (autore Carlo Elce)

$$f(x,k) = k \ln \left(\frac{k + \sqrt{k^2 - x^2}}{x} \right) + \sqrt{k^2 - x^2} \quad k = 11$$

$$g(x,k) = k \ln \left(\frac{k - \sqrt{k^2 - x^2}}{x} \right) - \sqrt{k^2 - x^2}$$

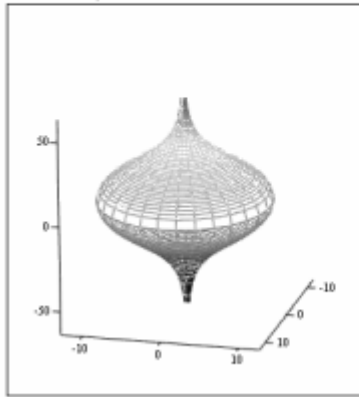


C1 curvatura meridiana: C2 curvatura parallela:

$$C1(x,k) = \frac{-x}{k\sqrt{k^2 - x^2}} \quad C2(x,k) = \frac{\sqrt{k^2 - x^2}}{kx}$$

C curvatura totale:

$$C(x,k) = C1(x,k) \cdot C2(x,k)$$



C1(x,k) =	C2(x,k) =	C(x,k) =
-8.264·10 ⁻⁵	100	-8.264·10 ⁻³
-9.091·10 ⁻⁴	9.09	-8.264·10 ⁻³
-1.736·10 ⁻³	4.761	-8.264·10 ⁻³
-2.563·10 ⁻³	3.225	-8.264·10 ⁻³
-3.391·10 ⁻³	2.437	-8.264·10 ⁻³
-4.219·10 ⁻³	1.959	-8.264·10 ⁻³
-5.049·10 ⁻³	1.637	-8.264·10 ⁻³
-5.88·10 ⁻³	1.406	-8.264·10 ⁻³
-6.712·10 ⁻³	1.231	-8.264·10 ⁻³
-7.547·10 ⁻³	1.095	-8.264·10 ⁻³
-8.383·10 ⁻³	0.966	-8.264·10 ⁻³
-9.221·10 ⁻³	0.896	-8.264·10 ⁻³
-0.01	0.821	-8.264·10 ⁻³
-0.011	0.758	-8.264·10 ⁻³
-0.012	0.703	-8.264·10 ⁻³
-0.013	0.656	-8.264·10 ⁻³

La sfera è una particolare superficie di rotazione avente uguali i raggi di curvatura principali. Pertanto anche il prodotto delle curvature principali (detto curvatura totale, o di Gauss) è ovunque costante sulla sfera. Esiste un'altra superficie di rotazione la cui curvatura totale è costante in ogni punto, ma negativa. Tale superficie è detta perciò Pseudosfera, e si incontra nella trattazione matematica della teoria della Relatività. L'animazione tende ad evidenziare che, al variare della superficie generata dalla rotazione della trattrice, variano le curvature principali, ma per ogni superficie la curvatura totale non varia lungo la superficie stessa.

Seguono diversi fotogrammi su alcuni teoremi di analisi matematica trattati graficamente e numericamente mediante animazioni ottenute parametrizzando le funzioni coinvolte.

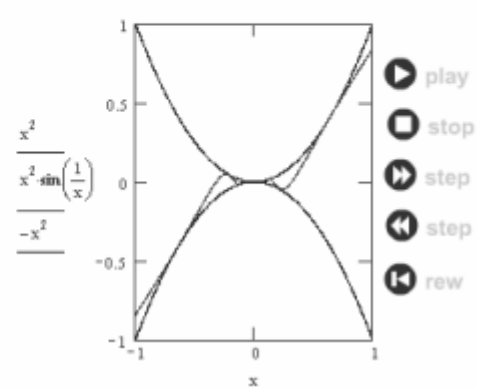
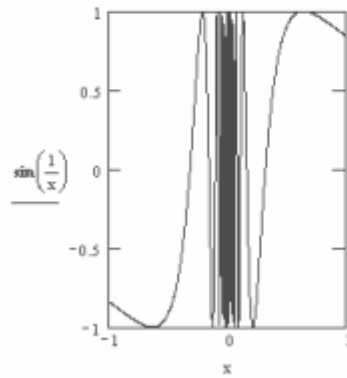
Interpretazione grafica dei seguenti limiti in un intorno di 0 di semidimensione $d := \frac{1}{\sqrt{k}}$

Carlo Elce

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ non esiste}$$

$$k = 1 \\ d = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$



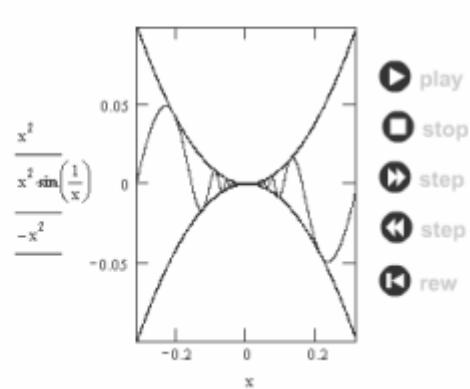
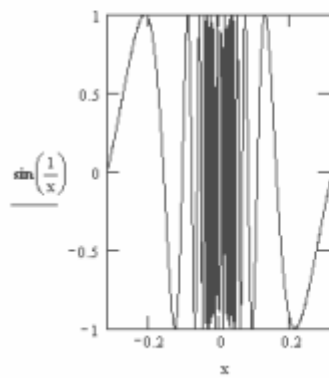
Interpretazione grafica dei seguenti limiti in un intorno di 0 di semidimensione $d := \frac{1}{\sqrt{k}}$

Carlo Elce

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ non esiste}$$

$$k = 10 \\ d = 0.316$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$



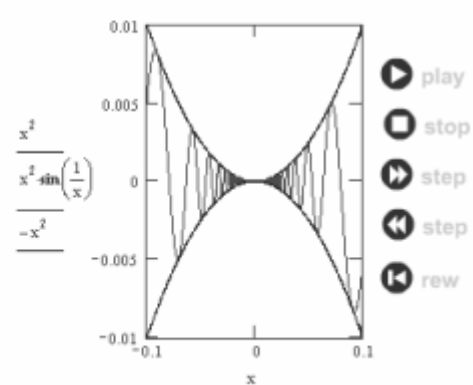
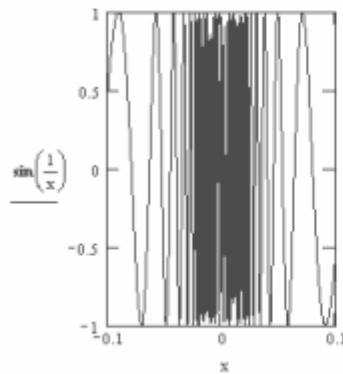
Interpretazione grafica dei seguenti limiti in un intorno di 0 di semidimensione $d := \frac{1}{\sqrt{k}}$

Carlo Elce

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ non esiste}$$

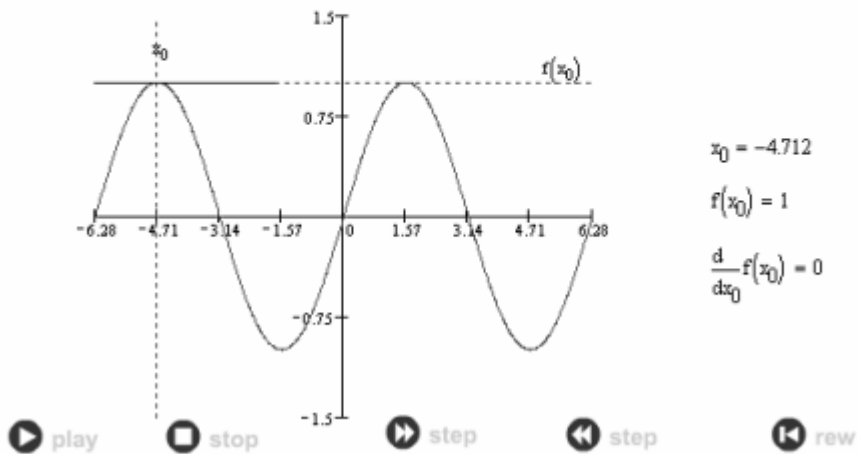
$$k = 99 \\ d = 0.101$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$



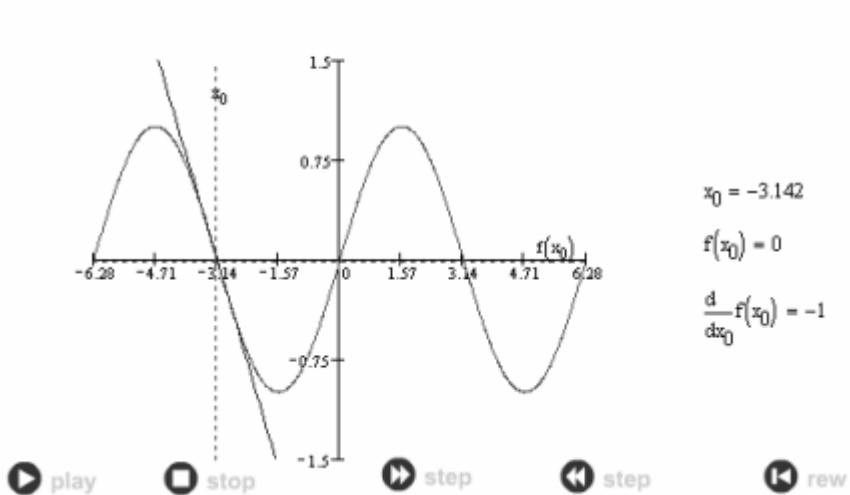
Tangente alla funzione $f(x)=\sin(x)$ in un punto x_0 variabile tra -2π e 2π
Calcolo e rappresentazione grafica del valore della derivata prima nei
punti di massimo o di minimo

autore Carlo Elce



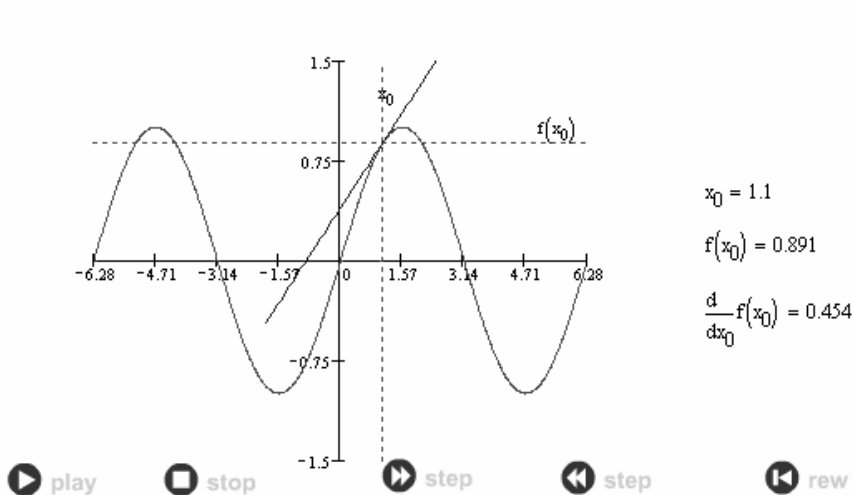
Tangente alla funzione $f(x)=\sin(x)$ in un punto x_0 variabile tra -2π e 2π
 Calcolo e rappresentazione grafica del valore della derivata prima nei
 punti di massimo o di minimo

autore Carlo Elce

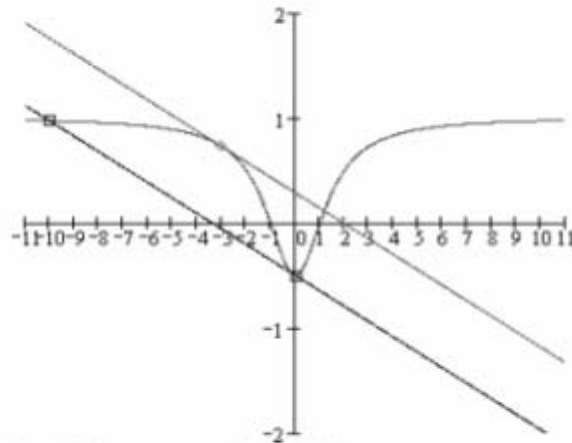


Tangente alla funzione $f(x)=\sin(x)$ in un punto x_0 variabile tra -2π e 2π
 Calcolo e rappresentazione grafica del valore della derivata prima nei
 punti di massimo o di minimo

autore Carlo Elce



TEOREMA DI LAGRANGE per la funzione: $g(x) := \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2}$ $x \in [a,b]$
 (autore Carlo Elce)



$$a = 0$$

$$b = -10$$

$$c = -3.015$$

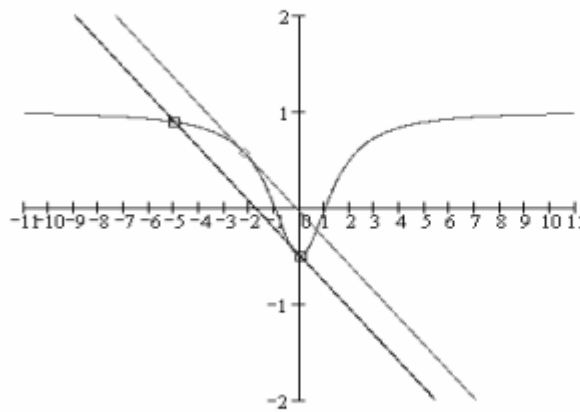


$$m = -0.147$$

Coefficiente angolare della secante:

Coefficiente angolare della tangente in $c = -3.015$ $\frac{d}{dc}g(c) = -0.147$

TEOREMA DI LAGRANGE per la funzione: $g(x) := \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2}$ $x \in [a,b]$
 (autore Carlo Elce)



$$a = 0$$

$$b = -5$$

$$c = -2.219$$

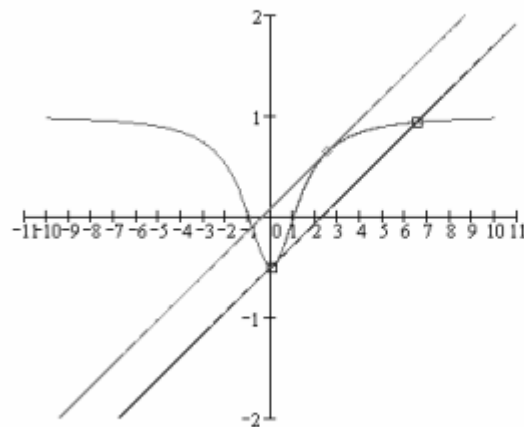


$$m = -0.278$$

Coefficiente angolare della secante:

Coefficiente angolare della tangente in $c = -2.219$ $\frac{d}{dc}g(c) = -0.278$

TEOREMA DI LAGRANGE per la funzione: $g(x) := \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2}$ $x \in [a,b]$
 (autore Carlo Elce)



$$a = 0$$

$$b = 6.5$$

$$c = 2.5$$

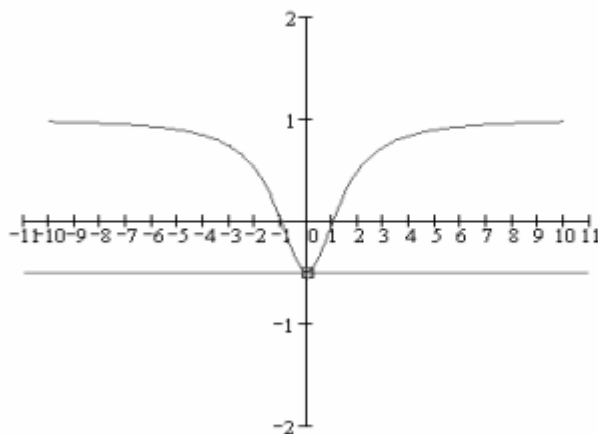


$$m = 0.22$$

Coefficiente angolare della secante:

Coefficiente angolare della tangente in $c = 2.5$ $\frac{d}{dc}g(c) = 0.22$

TEOREMA DI LAGRANGE per la funzione: $g(x) := \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2}$ $x \in [a,b]$
 (autore Carlo Elce)



$$a = 0$$

$$b = 0$$

$$c = 0$$



$$m = 0$$

Coefficiente angolare della secante:

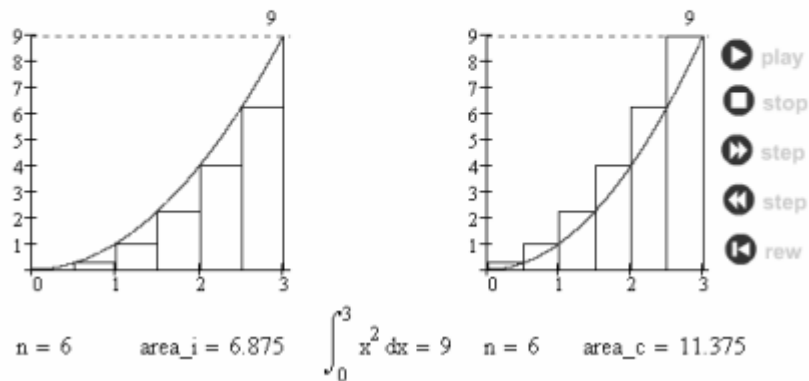
Coefficiente angolare della tangente in $c = 0$ $\frac{d}{dc}g(c) = 0$

SOMME INTEGRALI DI RIEMANN INFERIORI E SUPERIORI PER $F(x)=x^2$
NELL'INTERVALLO $[0,3]$ (AUTORE CARLO ELCE)

area_i : area plurirettangolo inscritto nel trapezoide di base $[0,3]$

area_c : area plurirettangolo circoscritto al trapezoide di base $[0,3]$

n: numero divisioni dell'intervallo $[0,3]$

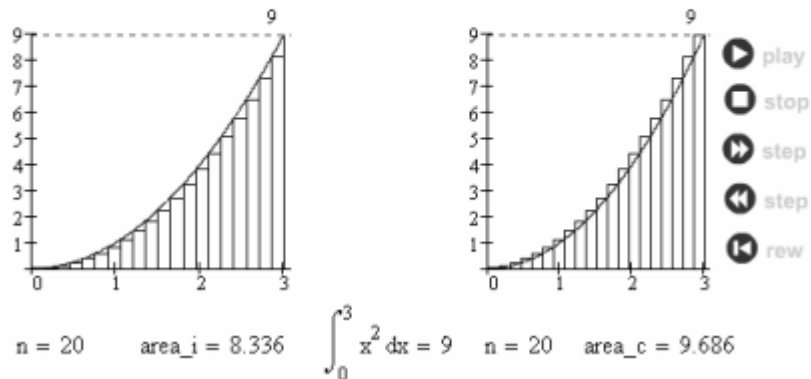


SOMME INTEGRALI DI RIEMANN INFERIORI E SUPERIORI PER $F(x)=x^2$
NELL'INTERVALLO $[0,3]$ (AUTORE CARLO ELCE)

area_i : area plurirettangolo inscritto nel trapezoide di base $[0,3]$

area_c : area plurirettangolo circoscritto al trapezoide di base $[0,3]$

n: numero divisioni dell'intervallo $[0,3]$

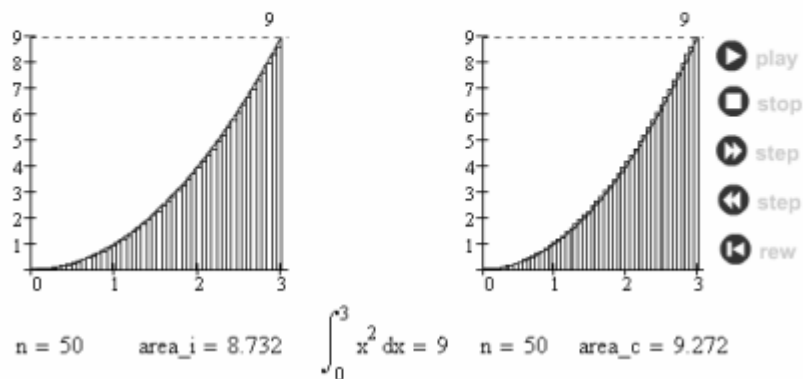


SOMME INTEGRALI DI RIEMANN INFERIORI E SUPERIORI PER $F(x)=x^2$
 NELL'INTERVALLO $[0,3]$ (AUTORE CARLO ELCE)

area_i : area plurirettangolo inscritto nel trapezoide di base $[0,3]$

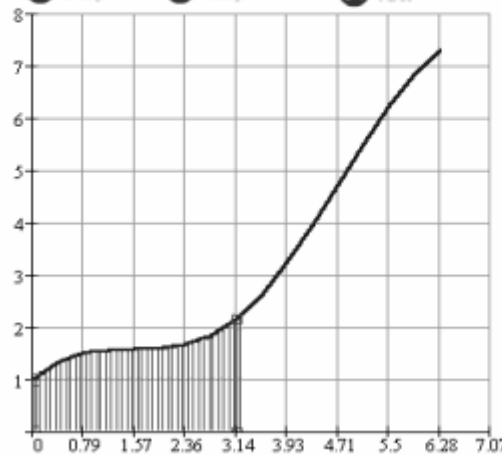
area_c : area plurirettangolo circoscritto al trapezoide di base $[0,3]$

n: numero divisioni dell'intervallo $[0,3]$



FUNZIONE INTEGRALE DELLA FUNZIONE $f(x)=\cos(x)+x$ E VARIAZIONE DELLA
 LUNGHEZZA DELLA CURVA CHE RAPPRESENTA TALE FUNZIONE

(autore CARLO ELCE)



0 estremo inferiore
 dell'intervallo d'integrazione
v estremo superiore variabile

$$v = 3.142$$

$$\cos(v) + v = 2.142$$

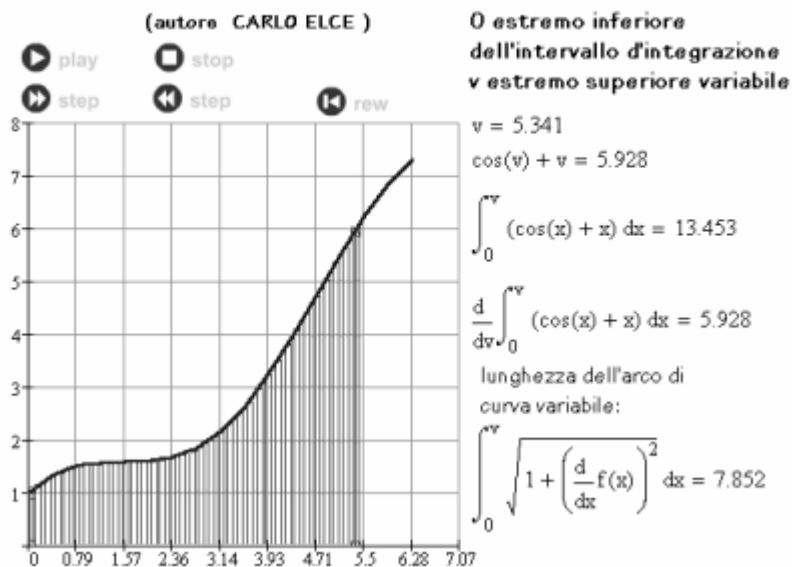
$$\int_0^v (\cos(x) + x) dx = 4.935$$

$$\frac{d}{dv} \int_0^v (\cos(x) + x) dx = 2.142$$

lunghezza dell'arco di
 curva variabile:

$$\int_0^v \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx} f(x)\right)^2} dx = 3.459$$

FUNZIONE INTEGRALE DELLA FUNZIONE $f(x)=\cos(x)+x$ E VARIAZIONE DELLA LUNGHEZZA DELLA CURVA CHE RAPPRESENTA TALE FUNZIONE



Per vedere in azione le animazioni bisogna aprire due file in formato html allegati al cd che accompagna questo lavoro cliccando rispettivamente sul file testo_pseudosfera.html della cartella pseudosfera_beltrami e sul file schermata_animazioni_analisi.html della cartella animazioni didattiche.

Bibliografia

Gino Moretti ANALISI MATEMATICA volume II- parte II
 BASI ANALITICHE DELLA FISICA MODERNA
 Hoepli Milano
www.matematicamente.it/elce/carlo_elce.htm

CARLO ELCE