L'uso di Mathcad nello studio numerico e grafico delle serie.

Sunto

Lo studio delle serie con i metodi dell'analisi infinitesimale suscita qualche difficoltà negli allievi, soprattutto perché esse necessitano della dimostrazione di alcuni teoremi, che spesso si sviluppano solo sul piano logico-formale.

L' esperienza didattica evidenzia che questi strumenti matematici risultano particolarmente interessanti per i ragazzi degli ultimi anni della scuola media superiore, nel momento in cui nasce il problema di trovare dei valori significativi di alcune funzioni trascendenti, che rappresentano fenomeni fisici o scientifici in genere.

Il mio intento è di presentare queste nozioni mediante l'uso di un software applicativo quale è Mathcad, che risulta un potente strumento di calcolo e al tempo stesso un versatile strumento di rappresentazione grafica dinamica.

La mia esperienza didattica, mi ha portato a preferire un approccio grafico, spesso supportato da animazioni che evidenziano le proprietà, in discussione, in modo diretto ed immediato. Questo ultimo motivo mi sembra molto valido sia a giustificazione delle formule stesse, a volte non così evidenti in contesti formali, sia come stimolo per gli alunni più "creativi" a ricercare proprietà e relazioni.

Abstract

Use of Mathcad in numerical and graphical study of series.

The infinitesimal analysis method used in the study of series provokes some difficulties in the students, above all because they need the demonstrations of some theorems, which often are developed only in a logical-formal way. Didactic experience shows that these mathematical tools are particularly interesting for students belonging the second grade school, when the

problem to find significant values for some functions generally representing physical or scientific phenomena's.
My purpose is presenting these know ledges using a software as Mathcad, that is a versatile dynamic graphic representation tool and a powerful instrument of calculation at the time itself.
My didactic experience took me to prefer a graphic approach, often supported by animations which highlight the properties, in discussion, in a direct and immediate way. This last reason seems very valid to me in order to justify the formulas themselves, sometimes not so clear in formal contexts, both as stimulus for "most creative" pupils to search for property and relations.

Premessa

Lo studio delle serie con i metodi dell'analisi infinitesimale desta, come è noto, alcune reticenze negli allievi, soprattutto perché esse necessitano della dimostrazione di alcuni teoremi, che spesso risultano un poco astratti e non immediatamente carichi di senso intuitivo.
D'altra parte ho avuto modo di osservare, attraverso la mia esperienza didattica, che questi strumenti matematici destano particolare interesse sui ragazzi della scuola media superiore nel momento in cui nasce il problema di trovare valori opportuni di alcune funzioni trascendenti che rappresentano fenomeni fisici o scientifici in genere.
Il mio intento è di presentare queste nozioni in modo da evidenziarne non solo le proprietà fondamentali, ma anche la semplicità mediante l'uso di un software applicativo quale è Mathcad, che risulta un potente strumento di calcolo e al tempo stesso un versatile strumento di rappresentazione grafica dinamica.
La mia esperienza, che voglio condividere con altri colleghi attraverso questa comunicazione, mi ha portato a preferire un approccio grafico e dinamico, spesso supportato da animazioni che evidenziano le proprietà, che si vogliono discutere, in modo diretto ed immediato. Questo ultimo motivo mi sembra molto

valido sia a giustificazione delle formule stesse, a volte non così evidenti in contesti formali, sia come stimolo per gli alunni più "creativi" a ricercare i legami di cui si diceva, rendendo così più speculativo l'impatto con le serie stesse.
Nei prossimi paragrafi illustrerò il percorso seguito con gli studenti, cercando anche di mettere in evidenza le valenze didattiche delle mie scelte.

Serie geometriche

La somma di una serie infinita $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ talvolta può divergere, tendendo all'infinito positivo o negativo, o può oscillare senza stabilizzarsi. Se la successione delle somme parziali si avvicina sempre più al limite l, si dice che la serie converge a l.
Affinché una serie converga, deve verificarsi la seguente condizione:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$$

I termini della successione devono tendere a 0.
Questa condizione è necessaria, ma non sufficiente affinché una serie converga.
Affinché una serie geometrica $a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \ldots$ converga, deve verificarsi la seguente condizione:

$$|r| < 1$$

Questa è una condizione necessaria e sufficiente per la convergenza di una serie geometrica.
Prendiamo in considerazione tre serie infinite. Rappresentiamo graficamente le prime 10 somme parziali di ciascuna e vediamo se le serie convergono o divergono.

Serie 1:

– 1 + 2 – 4 + 8 – 16 + …

Questa è una serie geometrica di ragione r = –2.

Primo termine:

$$s_1 := -1$$

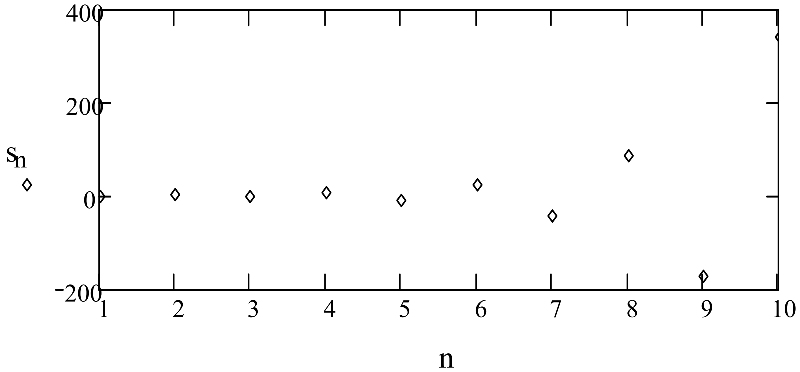
Ragione:

$$r := \frac{2}{-1}$$

Rappresentazione grafica delle prime 10 somme parziali:

$$n := 1 .. 10$$

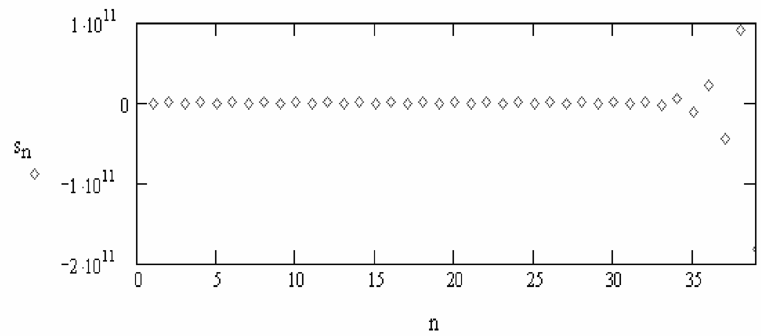
$$s_n := s_1 \cdot \left(\frac{1 - r^n}{1 - r} \right)$$



Rappresentazione grafica delle prime somme parziali n-sime: $n := 1 .. 1 + FRAME$

$$s_n := s_1 \cdot \left(\frac{1 - r^n}{1 - r} \right)$$

play stop step step rew



Poiché | r | > 1, la serie non converge. Al crescere di **n**, le somme parziali divergono in valore assoluto, alternando valori positivi e valori negativi.

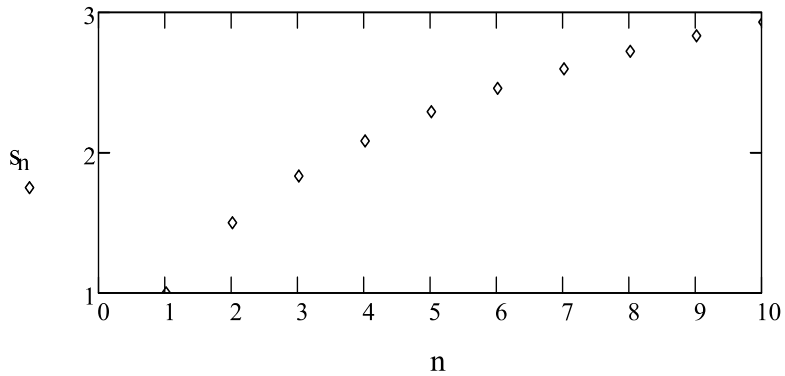
Serie 2:

1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + …

Questa serie infinita è detta serie armonica.

Calcoliamo le prime 10 somme parziali.

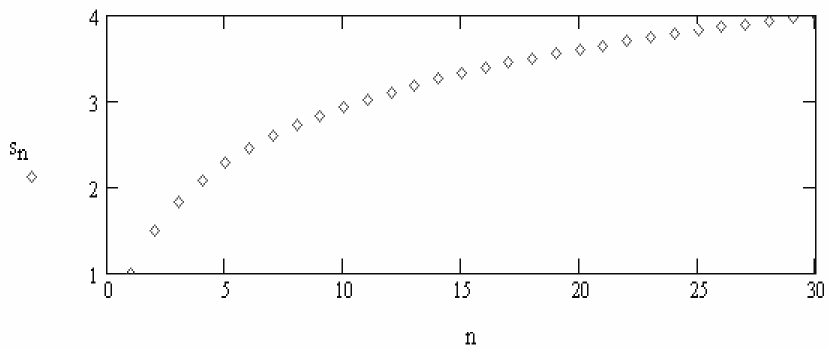
$$s_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$



Rappresentazione grafica delle prime somme parziali n-sime: $\mathbf{n} := 1 .. 1 + \mathrm{FRAME}$

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

play stop step step rew



La serie converge? E' vero che i termini successivi della successione tendono a 0:

$$\lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} = 0$$

La serie invece diverge:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

Serie 3:

1/2 + 1/6 + 1/18 + …

Questa è una serie geometrica di ragione r = 1/3.

Primo termine:

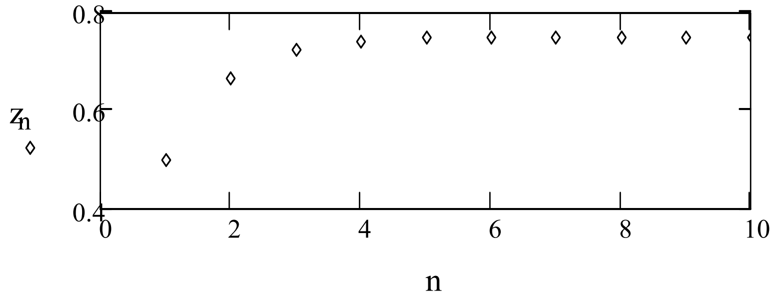
$$s_1 := \frac{1}{2}$$

Ragione:

$$r := \frac{1}{3}$$

Rappresentazione delle prime 10 somme parziali:

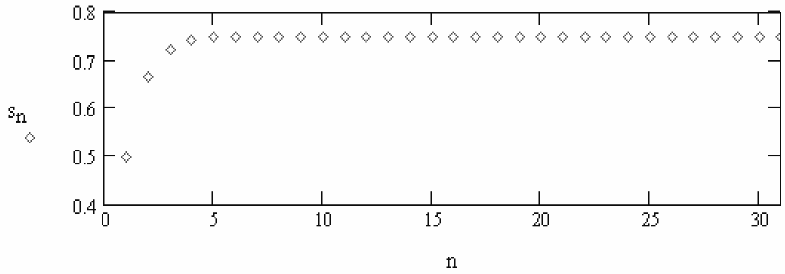
$$z_n := s_1 \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r}$$



Rappresentazione grafica delle prime somme parziali n-sime:

$$s_n := s_1 \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

play stop step step rew



Esiste una formula per il calcolo del limite di una serie geometrica convergente. Ricorda che la somma parziale n-sima di una serie geometrica è data da:

$$S_n = a \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

dove **a** è il primo termine della serie.

Al crescere di n, r^n decresce (ricorda che $| r | < 1$) e S_n tende a:

$$\lim_{n \to \infty} a \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r} = a \cdot \frac{1}{1 - r}$$

Questa è la formula per la somma di una serie geometrica convergente.

Per la Serie 3 vista sopra, si ha

$$s_1 \cdot \frac{1}{1 - r} = 0.75$$

Per calcolare l'errore che si commette prendendo la somma parziale n-sima invece della somma della serie si può introdurre la variabile FRAME e vedere la variazione della somma parziale n-sima e dell'errore al variare di n

$\mathbf{n} := 1..\ 1 + \mathrm{FRAME}$

$\mathbf{n} =$	$\mathbf{s}_n =$	$0.75 - \mathbf{s}_n =$
1	0.5	0.25
2	0.6666667	0.0833333
3	0.7222222	0.0277778
4	0.7407407	$9.2592593\cdot10^{-3}$
5	0.7469136	$3.0864198\cdot10^{-3}$
6	0.7489712	$1.0288066\cdot10^{-3}$
7	0.7496571	$3.4293553\cdot10^{-4}$
8	0.7498857	$1.1431184\cdot10^{-4}$
9	0.7499619	$3.8103948\cdot10^{-5}$
10	0.7499873	$1.2701316\cdot10^{-5}$
11	0.7499958	$4.233772\cdot10^{-6}$
12	0.7499986	$1.4112573\cdot10^{-6}$
13	0.7499995	$4.7041911\cdot10^{-7}$
14	0.7499998	$1.5680637\cdot10^{-7}$
15	0.7499999	$5.226879\cdot10^{-8}$
16	0.75	$1.742293\cdot10^{-8}$

play
stop
step
step
rew

Approssimazione di una funzione mediante un polinomio
Diciamo P(x) un polinomio in x di grado m, che consideriamo ordinato secondo le potenze crescenti della x:

$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\cdots+a_mx^m.$
Le sue derivate successive sono:

$P'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots\cdots ma_mx^{m-1}$
$P''(x)=\quad 2a_2x+2\cdot 3a_3x+\cdots\cdots(m-1)\cdot ma_mx^{m-2}$
$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$
$P^{(m)}(x)=\qquad\qquad m!a_m.$

Abbiamo quindi, calcolandole per x=0:

$P(0)=a_0$
$P'(0)=a_1$
$P''(0)=2a_2$
$P'''(0)=3!a_3$
....
$P^{(m)}(0)=m!a_m$
Sicché, ricavando i coefficienti dalle relazioni precedenti, il polinomio può essere scritto:

$$P(x) = P(0) + P'(0)\cdot x + P''(0)\cdot\frac{x^2}{2!} + \text{......................} + \frac{P^{(m)}\cdot(0)}{m!}\cdot x^m$$

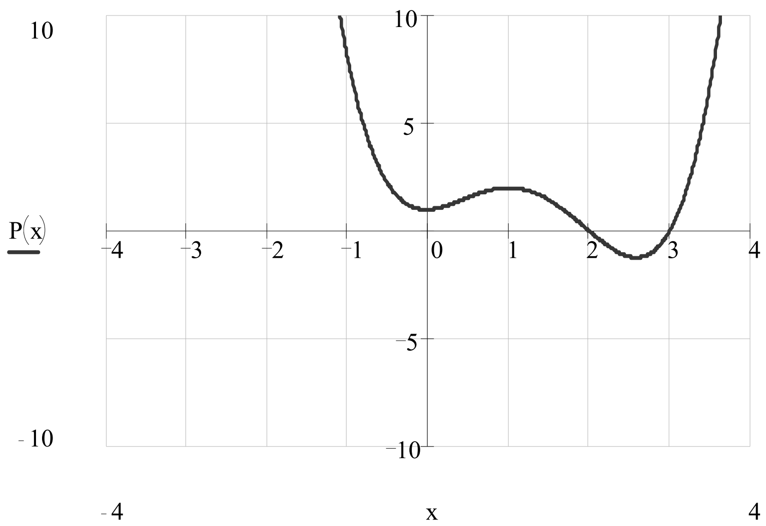
Se in questa espressione trascuriamo i termini dall'(n+2)-simo in poi evidentemente la curva rappresentatrice del nuovo polinomio

$$p(x) = P(0) + P'(0)\cdot x + P''(0)\cdot\frac{x^2}{2!} + \text{......................} + \frac{P^{(n)}\cdot(0)}{n!}\cdot x^n$$

non coincide con la curva rappresentatrice di P(x); l'errore commesso considerando le sue ordinate in luogo di quelle di y=P(x) è la differenza P(x)-p(x) che indicheremo con il simbolo $R_n(x)$. Si constata che l'errore è tanto minore quanto più si è vicini all'origine e quando è più grande n.
Si consideri ad esempio il polinomio:

$$P(x) := 1 + \frac{1}{6}\cdot x + \frac{10}{3}\cdot x^2 - \frac{19}{6}\cdot x^3 + \frac{2}{3}\cdot x^4$$

rappresentato sotto graficamente:



Se rappresentiamo con Mathcad i polinomi

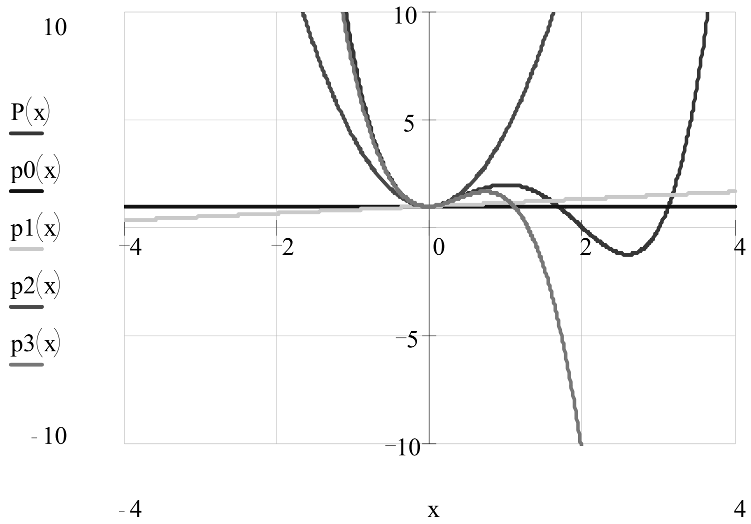
$$p1(x) := 1 + \frac{1}{6} \cdot x$$

$$p2(x) := 1 + \frac{1}{6} \cdot x + \frac{10}{3} \cdot x^2$$

$$p3(x) := 1 + \frac{1}{6} \cdot x + \frac{10}{3} \cdot x^2 - \frac{19}{6} \cdot x^3$$

$$p4(x) := 1 + \frac{1}{6} \cdot x + \frac{10}{3} \cdot x^2 - \frac{19}{6} \cdot x^3 + \frac{2}{3} \cdot x^4$$

otteniamo:



si osserva che le curve indicate con p0(x), p1(x), p2(x), p3(x) rappresentano i polinomi ottenuti dal dato arrestandosi al primo, secondo, terzo termine.
Appaiono evidenti dalla figura i fatti su accennati: qualunque sia il grado del polinomio approssimato, la sua curva differisce dal polinomio dato tanto meno quanto più si è vicini all'origine, gli intervalli in cui la curva data e quella approssimata differiscono di una stessa quantità, sono sempre più ampi.
Ci domandiamo ora, data una funzione qualunque y=f(x), se si possa trovare un polinomio che la rappresenti in modo approssimato in un conveniente intorno dell'origine. Per analogia con quanto abbiamo fatto precedentemente assumiamo come polinomio di approssimazione il seguente:

$$Q(x) := f(0) + \frac{\frac{d}{dx}f(0)}{1!}\cdot x + \frac{\frac{d^2}{dx^2}f(0)}{2!}\cdot x^2 \,.. \frac{\frac{d^n}{dx^n}f(0)}{n!}\cdot x^n$$

Tale assunzione è giustificata dal fatto che, se f(x) fosse proprio

un polinomio di grado n, la formula precedente diventerebbe una formula esatta.
Se invece f(x) è un polinomio di grado superiore ad n o una funzione qualunque, la formula non è più esatta; indichiamo ancora con Rn(x) l'errore commesso considerando Q(x) in luogo di f(x); poniamo cioè Rn(x)=f(x)-Q(x).
Cerchiamo una espressione di Rn(x) valevole per un determinato valore di x. Osserviamo innanzitutto che se, invece di Q(x), avessimo assunto come polinomio d'approssimazione il termine di grado n+1, l'ultimo suo addendo sarebbe risultato

$$\frac{\dfrac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} f(0)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}$$

Ciò induce a cercare per $R_n(x)$ una espressione dello stesso tipo, che scriveremo:

$$R_n(x) = \frac{C \cdot x^{n+1}}{(n+1)!}$$

essendo C un'incognita da determinare, che, ai fini del calcolo che segue, considereremo costante.
Derivando n volte Rn(x) otteniamo
$Rn(x)=C\cdot x=f^{(n)}(x)-\ f^{(n)}(0)$ e quindi applicando il teorema degli incrementi finiti alla funzione $f^{(n)}(x)$:
$C\cdot x=x\cdot f^{(n+1)}(t\cdot x)$
essendo t un numero compreso tra 0 e 1, da cui $C=\cdot f^{(n+1)}(t\cdot x)$.
Possiamo dunque concludere che l'errore commesso calcolando, per un dato valore di x, il valore di f(x) come se fosse dato da Q(x) è:

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(t \cdot x)$$

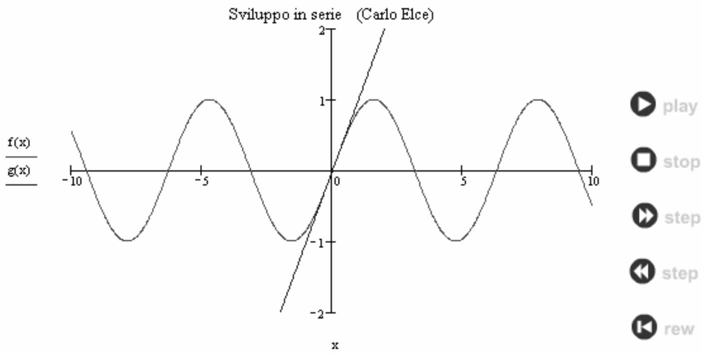
Posto sotto questa forma l'errore $R_n(x)$, si constata facilmente che esso gode ancora delle proprietà già accennate graficamente nell'esempio precedente:
a)l'errore è tanto minore quanto minore è in valore assoluto la x;
b)l'errore, per x sufficientemente piccolo, è tanto minore quanto più grande è n.
Per dimostrare queste due proprietà analiticamente basta supporre $f^{(n+1)}(x)$ continua nell'intervallo considerato; si può quindi scrivere:

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(t \cdot x) + \varepsilon$$

essendo ε una variabile che tende a 0 per x tendente a 0.
Rispetto ad x, preso come infinitesimo principale, $R_n(x)$ è infinitesimo di ordine n+1 almeno; da ciò si deducono le proprietà sopra accennate.
Queste proprietà, usando Mathcad, possono essere osservate graficamente mediante animazioni, che mettono in evidenza come, all'aumentare del numero dei termini dello sviluppo in serie di potenze, il grafico del polinomio approssimante si avvicina sempre di più alla funzione data in un intervallo sempre più ampio.
Prendiamo come esempio la funzione f(x)=sen(x):

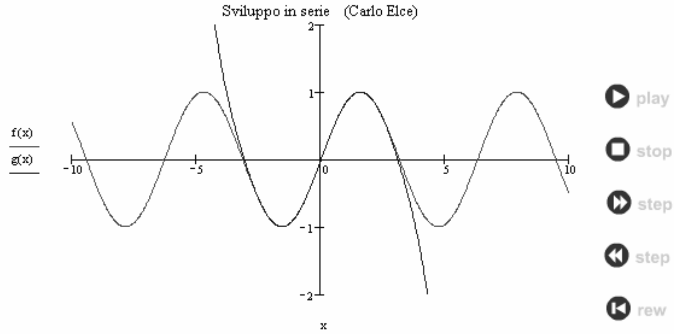
$f(x) := \sin(x)$

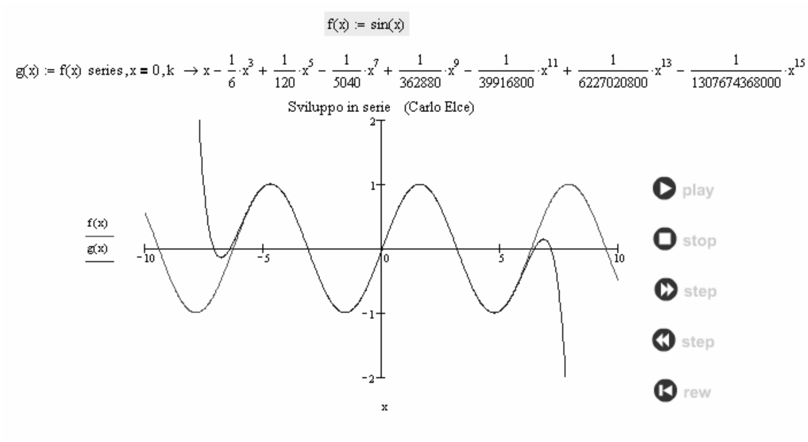
$g(x) := f(x)\ \text{series}, x = 0, k\ \rightarrow x$



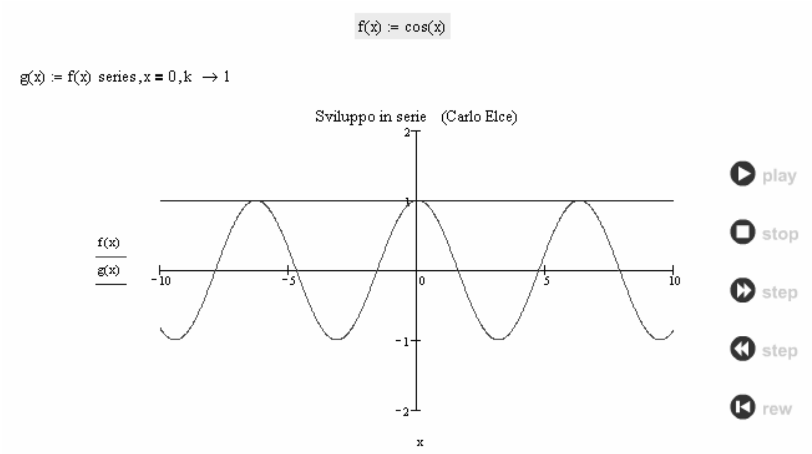
$f(x) := \sin(x)$

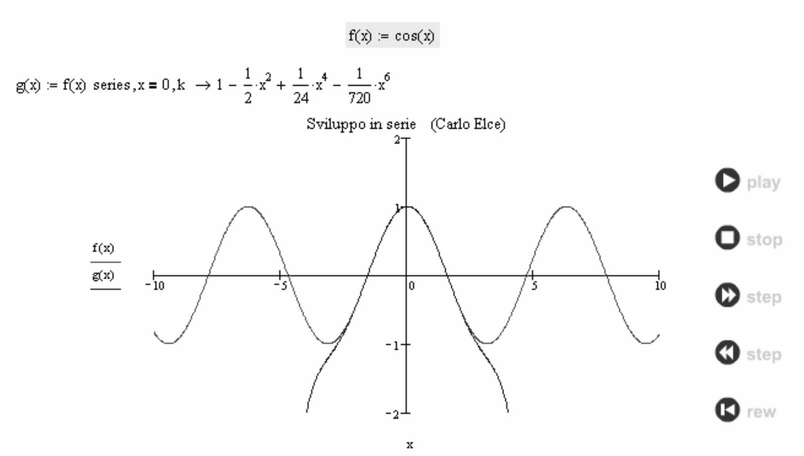
$g(x) := f(x)\ \text{series}, x = 0, k\ \rightarrow x - \frac{1}{6}\cdot x^3 + \frac{1}{120}\cdot x^5 - \frac{1}{5040}\cdot x^7$

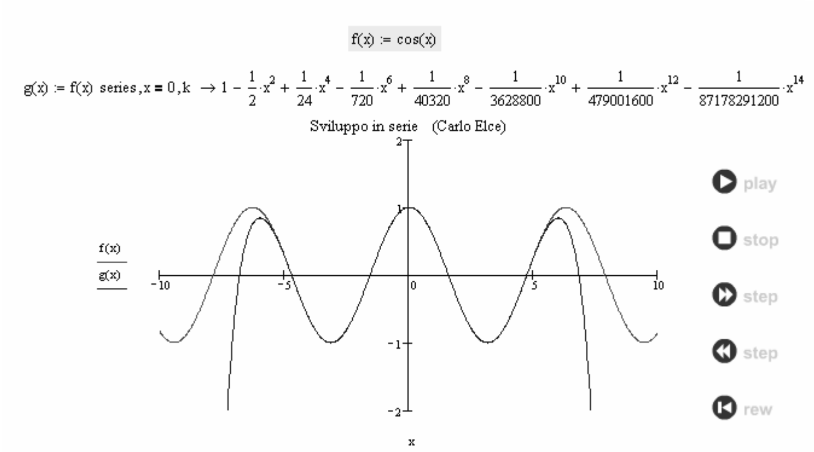




Prendendo come altro esempio la funzione f(x)=cos(x) possiamo osservare l’andamento dello sviluppo della funzione f(x)=cos(x):



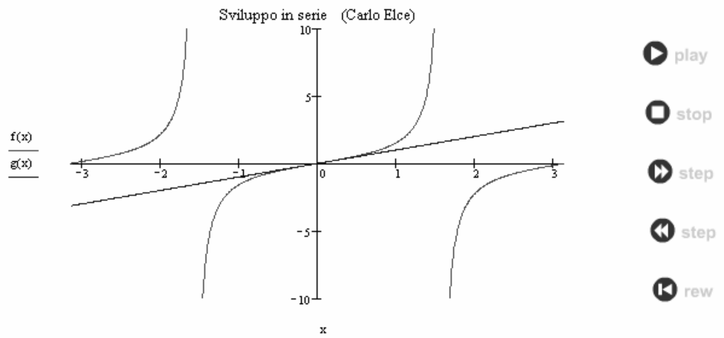




Prendiamo ora in considerazione la funzione f(x)=tan(x) e osserviamone graficamente lo sviluppo in serie di potenze:

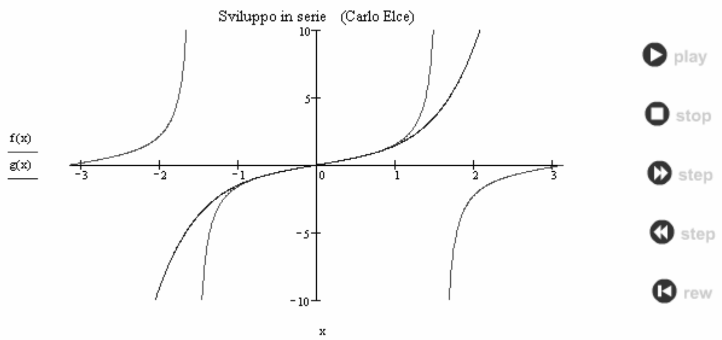
$f(x) := \tan(x)$

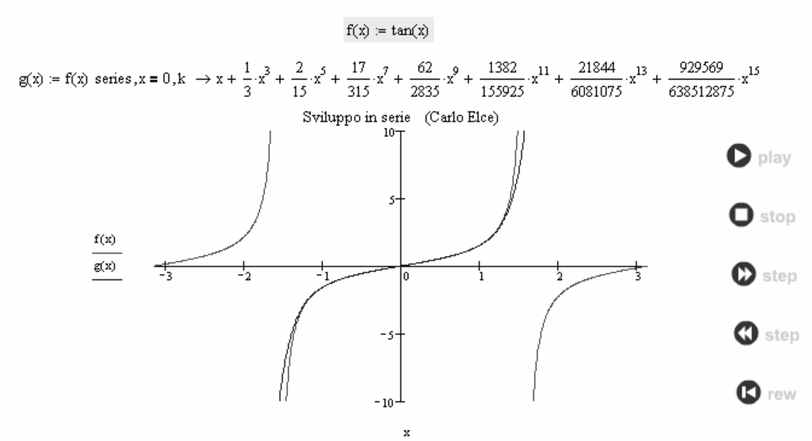
$g(x) := f(x)$ series, $x = 0, k \rightarrow x$



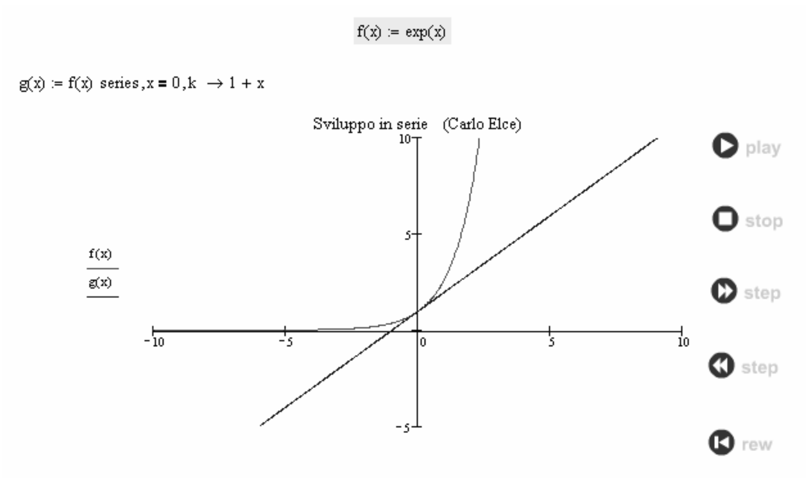
$f(x) := \tan(x)$

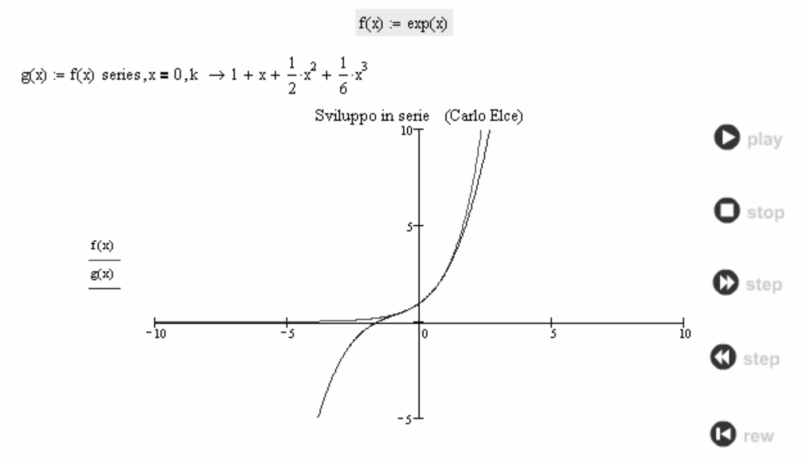
$g(x) := f(x)$ series, $x = 0, k \rightarrow x + \frac{1}{3}\cdot x^3 + \frac{2}{15}\cdot x^5$

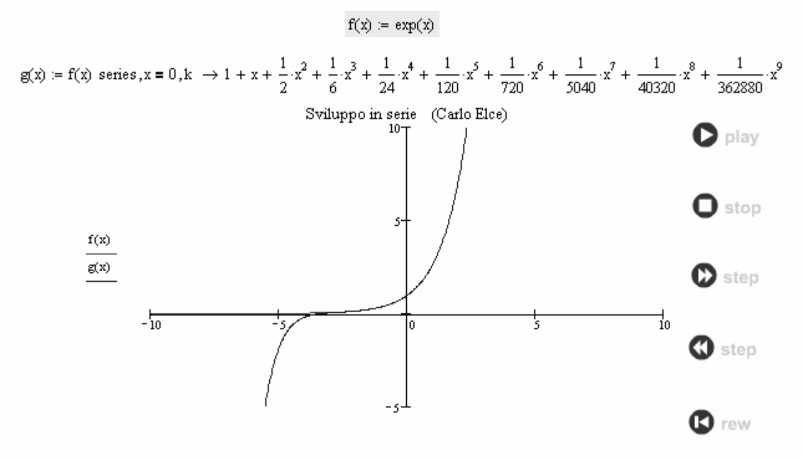




Passiamo a visualizzare l'andamento dello sviluppo in serie della funzione esponenziale all'aumentare del numero dei termini:



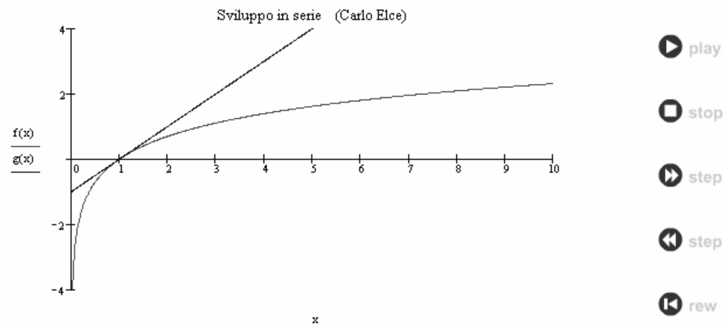




Ed infine visualizziamo l’andamento dello sviluppo in serie di potenze di punto iniziale 1 della funzione f(x)=ln(x):

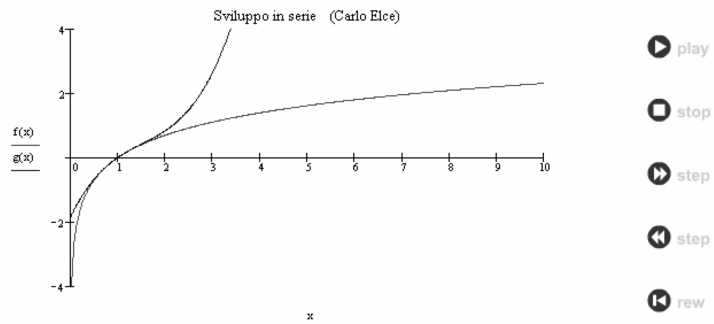
$f(x) := \ln(x)$

$g(x) := f(x) \text{ series}, x = 1, k \;\rightarrow\; x - 1$



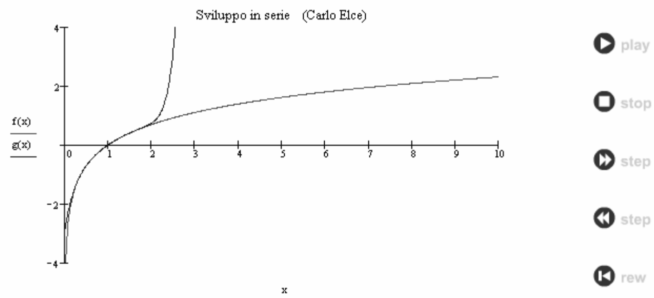
$f(x) := \ln(x)$

$g(x) := f(x) \text{ series}, x = 1, k \;\rightarrow\; x - 1 - \frac{1}{2}\cdot(x-1)^2 + \frac{1}{3}\cdot(x-1)^3$



$f(x) := \ln(x)$

$g(x) := f(x) \text{ series}, x = 1, k \;\rightarrow\; x - 1 - \frac{1}{2}\cdot(x-1)^2 + \frac{1}{3}\cdot(x-1)^3 - \frac{1}{4}\cdot(x-1)^4 + \frac{1}{5}\cdot(x-1)^5 - \frac{1}{6}\cdot(x-1)^6 + \frac{1}{7}\cdot(x-1)^7 - \frac{1}{8}\cdot(x-1)^8 + \frac{1}{9}\cdot(x-1)^9$



Bibliografia

www.matematicamente.it\elce\carlo_elce.htm

CARLO ELCE